

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY

POUR OBTENIR

le Titre de Docteur de l'Université de Nancy

MENTION SCIENCES

PAR

M. DAN I. HULUBEI

Licencié ès Sciences Mathématiques de l'Université de Jassy

1^{re} THÈSE : SUR LES RELATIONS

ENTRE LA THÉORIE DES ESPACES A COURBURE CONSTANTE
ET LA GÉOMÉTRIE DES SPHÈRES

2^e THÈSE : PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ

soutenues le 5 juin 1925 devant la Commission d'examen

Président	MM. HUSSON
Examineurs	G. DARMOIS
	MENTRÉ

NANCY

IMPRIMERIE M. COLIN, 11, RUE DES QUATRE-ÉGLISES

1925

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY

POUR OBTENIR

le Titre de Docteur de l'Université de Nancy

MENTION SCIENCES

PAR

M. DAN I. HULUBEI

Licencié ès Sciences Mathématiques de l'Université de Jassy

1^{re} THÈSE : SUR LES RELATIONS

ENTRE LA THÉORIE DES ESPACES A COURBURE CONSTANTE
ET LA GÉOMÉTRIE DES SPHÈRES

2^e THÈSE : PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ

soutenues le 5 juin 1925 devant la Commission d'examen



Président MM. HUSSON

Examineurs . . . { G. DARMOIS
MENTRÉ

NANCY

IMPRIMERIE M. COLIN, 11, RUE DES QUATRE-ÉGLISES

—
1925

UNIVERSITÉ DE NANCY — FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen : M. PETIT

Assesseur : M. GAIN

Professeurs honoraires : MM. HALLER, BLONDLOT, CARTAN, BLAISE,
LE MONNIER, THOULET, MULLER, GUYOT.

Chargé de cours honoraire : M. MILLOT

Professeurs :

MM. PETIT	Chimie agricole.
VOGT.	Mathématiques appliquées.
GUNTZ.....	Chimie minérale.
CUÉNOT.....	Zoologie.
GAIN.....	Botanique.
GUTTON.....	Physique.
HUSSON.	Mécanique rationnelle.
MAUDUIT.....	Electrotechnique.
LEAU.....	Calcul différentiel et intégral.
BOURION.....	Chimie physique et Electrochimie.
DARMOIS (E.)....	Physique.
VAVON.....	Chimie organique.
TRAVERS.....	Chimie industrielle.
DARMOIS (G.)....	Analyse supérieure.
LONGCHAMBON.....	Minéralogie.
FALLOT.....	Géologie.
COURTOT	Chimie appliquée à la teinture.
CORNUBERT.....	Chimie.
BOUIN	Zoologie appliquée.
GRUMBACH.....	Physique.
CROZE.....	Physique.

Chargé de Cours :

M. JOLY..... Géologie de Lorraine.

Maîtres de Conférences :

MM. MENTRÉ..... Mécanique appliquée.
RAYBAUD..... Botanique.

Secrétaire : M. BERTRAND

A MONSIEUR GEORGES DARMOIS

Professeur d'Analyse supérieure et de Géométrie supérieure
à la Faculté des Sciences de Nancy

Avant-Propos

Le présent travail m'a été inspiré par M. le Professeur G. DARMOIS, auquel je tiens à exprimer mes remerciements les plus sincères pour l'aide qu'il m'a toujours accordée avec une bienveillance sans cesse renouvelée, les conseils qu'il m'a donnés et pour l'aimable intérêt qu'il a porté à mes études. Je le prie de trouver ici l'expression de ma gratitude respectueuse et dévouée.

Que M. le Recteur Ch. ADAM et M. le Doyen P. PETIT veuillent bien aussi accepter mes remerciements respectueux pour les avantages nombreux qui m'ont été accordés si généreusement au cours de mes études.

Table des Matières

CHAPITRE PREMIER

L'espace des sphères. — Angle de deux directions. — Changement de coordonnées.

CHAPITRE II

Détermination métrique de Cayley. — Caractère projectif de l'espace C des sphères.
— Droites et plans polaires réciproques. — Points équidistants de plusieurs points donnés.

CHAPITRE III

Angles et distances. — Normales communes à deux droites.

CHAPITRE IV

Hypersphère. — Hypercylindre. — Génératrices rectilignes de l'hypercylindre et cercles paratactiques. — Propriétés des cercles paratactiques.

CHAPITRE V

Application d'un plan de l'espace C sur une sphère de rayon un. — Trigonométrie.
— Déplacements dans C .

Notations

On désignera dans la suite l'espace habituel par la lettre **E**.

L'espace à quatre dimensions dont les points représentent les sphères de **E** sera désigné par la lettre **C**.

Une figure de **E** correspondante à une figure de **C** sera représentée par le même symbole mis entre crochets.

Une forme quadratique des coordonnées homogènes d'un point variable X sera représentée par exemple par $U(X)$ et sa valeur pour les coordonnées d'un point A par $U(A)$.

Quand il n'y aura pas de confusion possible on désignera la forme en question par (X) et sa valeur pour le point A par (A) .

La forme polaire d'une forme quadratique $U(X)$ sera désignée par $U(AB)$ ou par (AB) .

Introduction

On appelle espace à n dimensions un ensemble d'éléments dont chacun correspond de façon biunivoque à un groupe de n nombres variant dans certains intervalles.

Par exemple l'ensemble des droites de l'espace forme un espace à quatre dimensions, en ce sens que chaque droite est caractérisée par quatre nombres qui fixent sa position.

L'ensemble des sphères de l'espace, qui sont considérées différentes l'une de l'autre si elles n'ont pas même rayon et même position, forme un espace à quatre dimensions, chaque sphère étant bien déterminée en position et grandeur en donnant les trois coordonnées du centre et le rayon.

L'ensemble des sphères de l'espace, considérées différentes l'une de l'autre si elles n'ont pas la même grandeur, forme un espace à une seule dimension, chaque sphère étant déterminée seulement par son rayon.

Dans ces exemples les nombres caractérisant un élément varient dans l'intervalle $-\infty, +\infty$ hors le rayon qui varie de zéro à $+\infty$.

Dans ce qui va suivre nous chercherons à illustrer l'étude métrique d'un espace à plusieurs dimensions en traitant le cas d'un espace à quatre dimensions, celui des sphères de l'espace, et en y ajoutant une forme fondamentale donnant l'angle des deux sphères, nous traiterons par une méthode plus générale les divers problèmes sur la géométrie conforme des sphères et des cercles.

Je serais très heureux si le présent travail pouvait être considéré comme un exemple géométrique simple et une introduction à la théorie des espaces à connexion conforme de M. E. CARTAN (v. p. ex. Comptes-rendus, T. 174, p. 857, Annales de la Société polonaise de Mathématique, 1923, etc.).



Digitized by the Internet Archive
in 2026

CHAPITRE PREMIER

L'espace des sphères

En donnant le nom de point à chaque élément de cet espace C , c'est-à-dire à une sphère, et de coordonnées aux nombres qui le caractérisent, on a comme coordonnées d'un point les quatre nombres

$$x, y, z, \rho$$

les trois premiers étant les coordonnées rectangulaires du centre de la sphère et ρ son rayon.

La forme fondamentale de cet espace sera

$$1) \quad ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2 - d\rho^2}{\rho^2}$$

car c'est elle qui donne l'angle infiniment petit ds de deux sphères infiniment voisines

$$x, y, z, \rho \text{ et } x + dx, y + dy, z + dz, \rho + d\rho (*)$$

Cet espace est à courbure constante car les composantes du tenseur du Riemann-Christoffel sont égales aux mineurs correspondants de la forme 1) (**). Cette courbure est donc égale à un.

En cherchant les géodésiques de cet espace on trouve les courbes

$$x = a + \frac{x}{K^2} \operatorname{tg} s, \text{ etc.}, \rho^{-1} = K \cos s \text{ avec } \Sigma x^2 = K^2$$

SIGNIFICATION GÉOMÉTRIQUE DES GÉODÉSQUES

Les points qui satisfont aux équations précédentes sont les sphères d'un faisceau linéaire, donc on peut dire que les géodésiques sont

(*) G. DARMOIS. — Éléments de géométrie des espaces, *Ann. de Phys.*, 10^e s., T. I, 1924.

(**) BIANCHI. — *Vorlesungen über Differential Geometrie*, Leipzig, 1899.

représentées par les cercles de l'espace, qui forment une infinité sextuple comme les courbes précédentes.

DIRECTIONS PARTANT D'UN POINT

En chaque point on peut considérer le cône

$$\Gamma = dx^2 + dy^2 + dz^2 - d\rho^2 = 0$$

qui est réel et divise l'espace en deux régions :

La région intérieure pour laquelle on a $\Gamma < 0$ et

La région extérieure avec $\Gamma > 0$

Une direction $\hat{z}$ quelconque, à partir d'un point P, est donnée par le groupe

$$2) \quad dx, dy, dz, d\rho$$

ce qui équivaut à la donnée d'un cercle sur la sphère [P] de l'espace ordinaire **E**.

La sphère [P] avec la sphère infiniment voisine dans la direction $\hat{z}$ se coupent suivant un cercle correspondant à la géodésique déterminée par le point P et la direction donnée.

Ce cercle se trouve dans le plan

$$3) \quad (X - x) dx + (Y - y) dy + (Z - z) dz + \rho d\rho = 0$$

Si la direction $\hat{z}$ est extérieure à Γ le cercle qui lui correspond est réel car la distance du centre de [P] au plan 3) est inférieure à ρ .

Si la direction $\hat{z}$ est intérieure, le plan ne coupe pas la sphère et le cercle est imaginaire.

Si la direction donnée est sur le cône le faisceau correspondant est composé de sphères tangentes.

Angles de deux directions

Considérons deux directions $d, \hat{z}$ qui partent d'un même point P. Leur angle θ est donné, par définition, par la formule

$$4) \quad ds. \hat{z}s. \cos \theta = (d, \hat{z})$$

où $(d\hat{z})$ représente la forme polaire, par rapport à d et $\hat{z}$, de la forme fondamentale 1).

L'angle θ peut être donné encore par la formule équivalente

$$5) \quad 2i\theta = \log. R(d, \hat{z}; \Gamma)$$

où $R(d, \hat{z}; \Gamma)$ représente le rapport anharmonique de deux directions

d et δ avec les droites d'intersection du cône Γ avec le faisceau plan 6)

$$D = d + \lambda \delta$$

Les cercles qui correspondent à ces directions D sont situés dans les plans dont les équations sont

$$(X - x) dx + \dots + \rho d\rho + \lambda [(X - x) \delta x + \dots + \rho \delta \rho] = 0$$

Ces plans tournent autour d'une droite $[a]$. Donc les cercles qui correspondent aux directions du faisceau 6) sont les cercles sur une sphère $[P]$ qui passent par deux points sur cette sphère.

Pour avoir la signification de l'angle de deux directions d , δ on doit mener les deux directions D , Δ situées sur le cône Γ et dans le faisceau 6) et appliquer la formule 5) ensuite, le rapport anharmonique étant celui des quatre directions d , δ , D , Δ .

Il faut donc mener par $[a]$ les deux plans tangents à la sphère. Le rapport anharmonique R est égale à celui des quatre plans : deux qui contiennent les cercles donnés $[d]$ et $[\delta]$ et les deux plans tangents.

Ces quatre plans sont coupés par la droite $[b]$, polaire de $[a]$ par rapport à $[P]$, en quatre points qui, joints à un des points d'intersection de deux cercles $[d]$, $[\delta]$, donnent quatre droites, dont le rapport anharmonique est celui qui doit figurer dans la formule 5).

Si les deux cercles $[d]$ et $[\delta]$ se coupent en deux points réels $[U]$ et $[V]$ les plans tangents à la sphère $[P]$ menés par $[a]$ sont déterminés par $[a]$ et les deux droites isotropes situées sur la sphère et passant par $[U]$.

Les quatre droites considérées précédemment sont les tangentes en $[U]$ aux deux cercles donnés et les droites isotropes passant par le même point et situées dans le même plan tangent à la sphère $[P]$.

La formule 5) est donc la formule de Laguerre donnant l'angle de deux cercles donnés.

Par conséquent l'angle de deux directions d et δ dans l'espace $\mathbb{C}$ des sphères est égal à l'angle de deux cercles $[d]$ et $[\delta]$ correspondant en $\mathbb{E}$.

ORTHOGONALITÉ

Pour que deux directions d et δ soient normales il faut qu'entre elles existe la relation

$$7) \quad (d, \delta) = 0$$

Les cercles correspondants $[d]$ et $[\delta]$ sont aussi orthogonaux.

Leurs plans, d'après la formule 7), sont conjugués par rapport à la sphère [P], contenant les deux cercles.

GÉODÉSIQUE MENÉE PAR UN POINT ET NORMALE A UNE AUTRE

Considérons une géodésique g et un point A. Chaque point M de g détermine avec A une géodésique dont la longueur l varie avec M.

Cette longueur sera un extremum si la géodésique AM est normale à g . Il faut donc, pour avoir cet extremum, mener par le cercle $[g]$ une sphère [P] qui coupe la sphère [A] suivant un cercle dont le plan soit conjugué avec le plan du cercle $[g]$ par rapport à [P]. On aura cette sphère en construisant la sphère [Q] passant par $[g]$ et normale à [A]. La sphère [P] est normale à [Q]. L'angle de la sphère [A] et la sphère [P] est l'extremum cherché, le cercle [AP] représentant la géodésique normale à g et passant par A.

Changement de coordonnées

Cherchons à faire un changement de coordonnées tel que les géodésiques se transforment en droites, c'est-à-dire que leurs équations soient linéaires. Comme ces droites doivent toujours représenter les faisceaux des sphères de l'espace E, on trouve immédiatement les nouvelles coordonnées.

Si l'équation de la sphère est

$$8) \quad [A] = X^2 + Y^2 + Z^2 - 2\alpha X - 2\beta Y - 2\gamma Z + 2\delta = 0$$

on voit que pour un faisceau déterminé par les deux sphères de coefficients

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ et } a, b, c, d$$

ses sphères ont les coefficients

$$\alpha + \lambda a, \beta + \lambda b, \gamma + \lambda c, \delta + \lambda d : 1 + \lambda$$

Donc si on prend comme coordonnées d'un point de C les coefficients,

$$\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta$$

les géodésiques seront des droites.

Les relations entre ces coordonnées et les premières sont évidentes :

$$x = \alpha \quad y = \beta \quad z = \gamma \quad \rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\delta$$

En rendant l'équation 8) homogène en ses coefficients, par l'intro-

duction du ε , on a comme coordonnées homogènes d'un point A les cinq nombres

$$x \ \beta \ \gamma \ \delta \ \varepsilon$$

Les relations entre ces coordonnées et les premiers sont

$$\varepsilon x = x \quad \varepsilon y = \beta \quad \varepsilon z = \gamma \quad \varepsilon^2 \rho^2 = x^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\delta\varepsilon \quad (*)$$

CHAPITRE II

Détermination métrique de Cayley

Considérons dans un espace quelconque une forme quadratique $\Phi(X)$. La surface $\Phi = 0$ est appelée l'absolu.

L'intervalle de deux éléments A et B est donné par définition à l'aide de la formule

$$1) \quad AB = k \log R(A, B; \Phi)$$

où $R(A, B; \Phi)$ est le rapport anharmonique de A et B avec les points d'intersection de Φ avec la droite AB.

Si on donne à k la valeur $\frac{1}{2i}$ on trouve l'expression envisagée par E. N. Laguerre et A. Cayley. La généralisation de la formule 1) où on peut donner à k toutes les valeurs est faite par F. Klein (**).

Si on envisage la forme adjointe de Φ , à l'aide d'une formule analogue à 1), où K peut avoir une autre valeur, on aura la mesure de l'angle de deux hyperplans.

L'angle de deux droites qui se coupent en un point A est aussi donné par la formule 1) où le rapport anharmonique est celui de deux droites données avec les droites passant par A, tangentes à Φ et contenues dans le même plan.

Les intervalles de trois éléments contenus dans une variété d'ordre

(*) Coordonnées employées par MOORE, *Jour. of Math.*, 1911 : Some properties of lines in space of four dimensions and their interpretations in the geometry of the circle in space of three dimensions.

(**) F. KLEIN. — *Nicht-Enklidische géométrie Vorlesung*, 1889-1890.

immédiatement supérieur, comme trois points sur une droite, trois droites dans un faisceau plan, etc., jouissent de la propriété additive

$$AB + BC = AC.$$

justement à cause de l'introduction du logarithme dans la formule 1).

On a à distinguer plusieurs cas suivant la réalité de l'absolu.

Si Φ est réelle on a le cas hyperbolique ; on n'envisage que les points situés à l'intérieur de Φ . La constante K a une valeur réelle.

Si Φ est imaginaire on a le cas elliptique. La constante K doit avoir une valeur purement imaginaire.

Si Φ est dégénérée on a le cas parabolique.

Les mouvements dans un espace cayleyen sont identiques aux transformations projectives qui laissent invariable l'absolu.

Caractère projectif de l'espace C des sphères

Considérons les sphères caractérisées par les cinq coordonnées homogènes $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$.

L'angle de deux sphères quelconques $[S]$ et $[\Sigma]$ est donné par la formule

$$2) \quad (S) (\Sigma) \cos^2 \Theta = (S\Sigma)^2$$

ou (S) représente la forme quadratique

$$3) \quad (S) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\delta\varepsilon$$

et $(S\Sigma)$ la forme polaire de la forme 3), pour les coordonnées des points S et Σ .

La formule 2) est équivalente à la formule

$$4) \quad 2i \cos \Theta = \log R (S, \Sigma; \Phi)$$

donc, dans cette représentation de l'espace C , on a à considérer une géométrie cayleyenne dont l'absolu est l'hyperquadrique

$$\Phi = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\delta\varepsilon = 0$$

qui est le lieu des points représentant les sphères de rayon nul.

L'absolu divise l'espace C en deux régions :

La région des points S dont les coordonnées rendent négative la

forme de l'absolu. Cette région est le lieu des points S représentant les sphères [S] de l'espace E dont les rayons sont imaginaires pures.

La région des points tels que leurs coordonnées rendent positive la forme Φ et qui est le lieu des points représentant les sphères réelles.

Deux points de la première région déterminent une droite qui coupe l'absolu ce qu'on peut montrer géométriquement. En effet, deux sphères de rayons imaginaires déterminent un faisceau de sphères, admettant deux sphères de rayon nul et de centres réels.

Appelons la région $\Phi < 0$ la région intérieure.

La deuxième est la région extérieure.

L'absolu est une hyper-surface concave n'admettant pas de génératrices rectilignes réelles.

Deux points de l'espace C dont la droite ne rencontre pas Φ ont une distance réelle, ce qu'on peut voir en se reportant à sa signification géométrique. On peut démontrer cela directement en observant que le rapport anharmonique de deux points réels et de deux points imaginaires conjugués a le module égal à un, donc son logarithme est une quantité purement imaginaire.

Nous chercherons maintenant les interprétations des diverses figures projectifs dans C, comme plans, hyperplans, faisceaux, etc.

DROITES

Une droite est bien déterminée par deux points A et B. Les coordonnées de ses points seront donnés par la formule symbolique

$$5) \quad M = \lambda A + \mu B$$

où on doit remplacer les lettres A B M successivement par les cinq coordonnées homogènes correspondantes.

Une droite peut encore être donnée à l'aide de trois équations linéaires. Ses points représentent, comme on a déjà vu, les sphères d'un faisceau linéaire.

Une droite déterminée par deux de ses points coupe l'absolu en deux points donnés à l'aide de la formule

$$6) \quad (M) = \lambda^2 (A) + 2 \lambda \mu (AB) + \mu^2 (B) = 0$$

qui fixe ainsi le rapport de deux paramètres λ et μ .

Soient P et Q les deux points donnés par 5) et 6). Ils représentent les deux sphères [P] et [Q] de rayon nul qui font partie du faisceau [A] [B] et dont les centres sont les foyers du cercle correspondant à la droite AB.

Ces foyers sont réels si la droite coupe l'absolu donc si le cercle correspondant est imaginaire, imaginaires conjugués si le cercle est réel et confondus si le cercle est de rayon nul, c'est-à-dire, si la droite AB est tangente à l'absolu, car dans ce cas l'équation 6) donne une seule valeur pour le rapport de λ et μ .

PLANS

La figure dont les points sont déterminés linéairement à l'aide de trois points qui ne sont pas en ligne droite s'appelle un plan.

$$7) \quad M = \lambda A + \mu B + \nu C$$

est la formule symbolique donnant les coordonnées d'un point M du plan en fonction des coordonnées de trois points A B C lesquelles forment un tableau de rang 3.

Les points M représentent dans l'espace **E** des sphères qui passent par l'intersection de trois sphères [A] [B] et [C].

Les sphères [M] admettent toutes un même axe radical et par conséquent un même cercle, réel ou imaginaire, auquel elles sont normales.

L'intersection du plan 7) avec l'absolu est donnée par l'équation

$$8) \quad (M) = \lambda^2 (A) + \mu^2 (B) + \nu^2 (C) + 2\lambda\mu(AB) + 2\mu\nu(BC) + 2\nu\lambda(CA) = 0$$

et par 7).

Ses points représentent les sphères de **E** de rayon nul avec leurs centres sur le cercle considéré ci-dessus. Si la forme 8) est définie positivement le cercle est imaginaire et les sphères [M] passent par deux points réels. Si cette forme n'est pas définie, le cercle est réel.

Si le déterminant de la forme 8) est nul, cette conique est dégénérée et le plan 7) est tangent à l'absolu au point T dont les coordonnées annulent les trois dérivés de 8) par rapport à ses variables. Le point T est un point isolé, l'hyperquadrique Φ n'admettant pas des génératrices rectilignes réelles. Les deux droites imaginaires de 8) représentent en **E** deux faisceaux linéaires de sphères de rayon nul, donc les axes de ces faisceaux ne peuvent-être que deux droites isotropes contenues dans le plan des centres des sphères [M]. Les sphères représentées par le plan 7) sont tangentes à une droite au même point [T].

Un plan peut encore être donné à l'aide de deux équations linéaires.

HYPERPLANS

L'ensemble des points dont les coordonnées sont données en fonction des coordonnées de quatre points, non situés dans un même plan, à l'aide de la formule

$$9) \quad M = \lambda A + \mu B + \nu C + \tau D$$

s'appelle un hyperplan.

En éliminant les quatre variables λ, μ, ν, τ de cinq équations 9) on a une relation linéaire par rapport aux coordonnées de M.

$$10) \quad ux + v\beta + w\gamma + t\delta + s\varepsilon = 0$$

Si on considère les coefficients de la forme linéaire 10) comme les coordonnées covariantes d'un point U, liées aux contrevariantes à l'aide de la forme invariante Φ , c'est-à-dire que la forme 10) est identique à la forme polaire $\Phi(U, M)$, on voit que les points d'un hyperplan sont à une distance d'un angle droit d'un autre point fixe U.

Ces points représentent les sphères qui coupent à angle droit une sphère fixe.

L'équation

$$11) \quad (UM) = 0$$

représente donc un hyperplan, dont le pôle par rapport à l'absolu est le point U.

L'intersection de l'hyperplan avec l'absolu est le lieu des points satisfaisant aux deux équations

$$12) \quad (UM) = 0; (M) = 0$$

et représentent les sphères de rayon nul, normales à la sphère [U], donc qui ont les centres sur cette dernière.

Si le point U est intérieur à Φ , l'intersection est imaginaire, si U est extérieur, l'intersection est réelle, car la sphère [U] est réelle.

Si le point U est sur l'absolu l'hyperplan 11) représente le lieu des sphères qui passent par un point [U]. Cet hyperplan est tangent à Φ . Il coupe l'absolu suivant le cône 12), dont les points représentent les sphères de rayon nul ayant leurs centres sur le cône isotrope de sommet [U].

Il existe sur l'absolu un point I qui joue un rôle spécial : c'est le point dont les coordonnées sont 0, 0, 0, 1, 0. Il représente le plan de l'infini en E.

L'hyperplan tangent à l'absolu en ce point représente l'ensemble des plans de $\mathbf{E}$, car son équation est $\varepsilon = 0$. Une droite de cet hyperplan représente une droite de $\mathbf{E}$; un plan de lui représente en $\mathbf{E}$ une gerbe de plans.

Un plan tangent en I à l'absolu représente une gerbe dont le sommet est à l'infini dans une direction quelconque. Une droite tangente à l'absolu au point I représente un faisceau de plans parallèles.

L'intersection de l'absolu avec l'hyperplan tangent en I est un cône de second degré dont les points représentent les plans isotropes de l'espace $\mathbf{E}$. Les génératrices du cône représentent donc les droites du plan de l'infini tangentes au cercle imaginaire (*).

FORMES

On peut considérer dans l'espace $\mathbf{C}$ les formes de divers rangs :

Les formes de rang un sont par exemple les ensembles des points d'une droite, les droites d'un faisceau plan, des hyperplans d'un faisceau linéaire.

Les formes de rang deux sont par exemple l'ensemble des points d'un plan, des hyperplans passant par une droite, etc.

Une forme de rang trois est par exemple l'ensemble des droites passant par un point.

Les droites coupant une droite fixe forment une multiplicité linéaire à quatre dimensions.

Une forme de rang cinq est l'ensemble des droites x coupant un plan donné p . Les sphères représentées par les points du p sont normales à un cercle $[f]$.

Les cercles représentés par les droites de la forme sont en involution avec le cercle $[f]$ (**), car par le cercle $[x]$ passe une sphère normale à l'autre cercle.

Droites et plans polaires réciproques

Considérons les hyperplans polaires des points d'une droite donnée par deux de ses points A et B.

(*) Moore.

(**) Dénomination donnée par G. Kœnigs. — *Ann. de Toul*, 1888. Contribution à la théorie du cercle dans l'espace.

Les équations de ces hyperplans sont

$$13) \quad (A + \lambda B, X) = (AX) + \lambda (BX) = 0$$

X représentant les points courants.

L'équation 13) représente un faisceau d'hyperplans passant par le plan dont les équations sont

$$14) \quad (AX) = 0; (BX) = 0$$

Les points du plan 14) sont tous à une distance d'un angle droit de tous les points de la droite AB. Ce plan s'appelle le plan polaire réciproque de la droite donnée.

Pour voir la signification de ces deux figures réciproques par rapport à l'absolu on observe que les équations 14) représentent le lieu des sphères [X] qui coupent à angle droit deux sphères [A] et [B] et par conséquent, à cause de 13) toutes les sphères du faisceau [AB]. Ces sphères doivent couper à angle droit le cercle déterminé par les deux sphères [A] [B]. Leurs centres se trouvent donc dans le plan de ce cercle et toutes ont même axe radical, l'axe du faisceau [AB].

L'intersection du plan 14) avec l'absolu est le cercle du faisceau. Si la droite AB ne coupe pas l'absolu, son plan polaire réciproque le coupe, car le cercle [AB] est réel.

Si on considère les hyperplans polaires de trois points A B C qui déterminent un plan,

$$15) \quad (AX) = 0 \quad (BX) = 0 \quad (CX) = 0$$

ils déterminent une droite dont les points X sont conjugués harmoniquement avec tous les points du plan A, B, C, car

$$(\lambda A + \mu B + \nu C, X) = 0$$

Un plan et sa droite polaire ne se coupent pas à moins que la droite ou le plan ne soient pas tangents à l'absolu.

En effet, il faut pour cela qu'un point

$$X = A + \lambda B$$

de la droite AB soit contenu dans le plan polaire de cette droite.

$$(A, A + \lambda B) = 0 \quad (B, A + \lambda B) = 0$$

Ces deux équations doivent donner la même valeur pour λ donc il faut que

$$(A) (B) - (AB)^2 = 0$$

ce qui est la condition pour que la droite A B soit tangente à

l'absolu. Le plan polaire est lui même tangent à Φ car si on cherche les hyperplans passant par lui et tangents à l'absolu, on en trouve un seul. En effet soit

$$16) \quad \Psi(a) = 0$$

la forme adjointe de la forme fondamentale.

Pour que l'hyperplan

$$(A + \lambda B, X) = 0$$

soit tangent à l'absolu il faut que ces coefficients satisfassent à l'équation 16).

Si on désigne pour abréger par « a » les coefficients de l'hyperplan $(AX) = 0$ et par b les coefficients du $(BX) = 0$ on doit avoir

$$\Psi(a + \lambda b) = \Psi(a) + 2\lambda \Psi(ab) + \lambda^2 \Psi(b) = 0$$

Cette équation, étant équivalente à l'équation 6), elle doit donner pour λ deux valeurs confondues, donc le plan polaire est lui aussi tangent à l'absolu.

INTERSECTIONS

Deux hyperplans se coupent suivant un plan.

Un hyperplan et une droite se coupent en un seul point. Ce point représente la sphère passant par un cercle et coupant une autre sphère à angle droit.

Deux plans se coupent suivant un point. C'est la sphère qui passe par les deux paires de points déterminant les plans donnés.

Un plan et une droite, en général, ne se coupent pas, c'est-à-dire qu'il n'existe pas toujours une sphère passant par un cercle et par deux points quelconques.

DROITES COUPANT TROIS DROITES DONNÉES (*)

Si les trois droites a , b et c sont dans un même hyperplan il existe en général une simple infinité de droites les coupant.

Dans le cas général il n'existe qu'une seule droite les coupant. En effet, deux de ces droites déterminent un hyperplan, lien des points situés sur toutes les droites s'appuyant sur elles. La troisième droite

(*) SEGREG. — *Rendi Conti di Palermo*, 1890 (Mentionné par Moore).

coupe cet hyperplan en un point d'où on peut mener une seule droite coupant les deux premières.

Il existe donc un seul cercle qui coupe trois cercles donnés chacun en deux points. Il peut se construire ou en suivant la traduction de la méthode ci-dessus, ou en construisant le plan qui est déterminé par les trois points radicaux situés sur les droites d'intersections de trois plans des cercles donnés. Ce plan coupe les trois cercles en six points situés sur le cercle cherché.

Points équidistants de plusieurs points donnés

LIEU DES POINTS ÉQUIDISTANTS DE DEUX POINTS DONNÉS

La distance θ entre deux points A et X est donnée par la formule

$$(AX)^2 = \cos^2 \theta (A) (X)$$

On exprime que les distances d'un point X aux deux points A et B sont égales à l'aide de la formule

$$1) \quad (B) (AX)^2 - (A) (BX)^2 = 0$$

Le lieu des points à égale distance de deux points est formé par les deux hyperplans 1).

On peut supposer que dans le groupe de coordonnées des points A et B on fait ε égale à 1 donc (A) et (B) sont égales aux carrés des rayons de deux sphères [A] [B]. Donc les deux hyperplans ont les équations

$$2) \quad b (AX) \pm a (BX) = 0$$

a et b désignant les deux rayons des sphères [A] et [B].

Les pôles de ces deux hyperplans sont

$$3) \quad P = bA \pm aB$$

qui représentent les sphères passant par le cercle [AB] et dont les centres sont les points de similitude de deux sphères données, car ils divisent la droite des centres dans le rapport des rayons. On aurait pu voir cela directement, observant que les deux sphères 3) sont normales entre elles et divisent harmoniquement le groupe [A, B].

Donc les sphères coupant suivant un même angle deux sphères fixes sont normales à l'une de deux sphères de similitude des deux premières.

LIEU DES POINTS ÉQUIDISTANTS DE TROIS POINTS DONNÉS

Si on suppose que les trois points donnés sont A B C, les points cherchés doivent satisfaire aux équations

$$4) \quad (AX)^2 : (BX)^2 : (CX)^2 = (A) : (B) : (C)$$

Elles sont les équations de quatre plans.

En multipliant par des facteurs convenables les coordonnées homogènes des points donnés, on peut écrire les équations 4) sous la forme

$$\begin{aligned} 5) \quad & b (AX) \pm a (BX) = 0 \\ & c (BX) \pm b (CX) = 0 \\ & a (CX) \pm c (AX) = 0 \end{aligned}$$

la troisième étant dépendante de deux premières.

Les droites polaires de ces plans représentent les cercles passant par les deux points d'intersection de trois sphères [A] [B] [C] et dont les axes sont les quatre droites de similitude.

On prouve ainsi que les sphères qui coupent trois sphères données sous le même angle, coupent à angle droit un des quatre cercles envisagés précédemment en même temps que les trois paires de sphères de similitude se coupent trois à trois suivant un même cercle.

Les quatre plans 5) se coupent suivant une même droite qui est la droite polaire du plan déterminé par les trois points donnés.

LIEU DES POINTS ÉQUIDISTANTS DE QUATRE POINTS FIXES

Si les quatre points donnés sont A, B, C, D, le lieu demandé à les équations

$$(AX) : (BX) : (CX) : (DX) = a : \pm b : \pm c : \pm d$$

Elles représentent huit droites, qui se coupent en un même point, le pôle de l'hyperplan déterminé par les quatre points donnés.

Donc les sphères coupant quatre sphères suivant un même angle forment huit faisceaux linéaires dont les cercles sont situés sur la sphère orthogonale commune et les huit plans de similitude (*).

(*) DARBOUX. — *Ann. de l'Ec. Norm*, 23, T. 1, 1872, Sur les groupes de sphères, cercles et points.

POINTS ÉQUIDISTANTS DE CINQ POINTS DONNÉS

Les points qui sont à de mêmes distances de cinq points fixes A, B, C, D, E, doivent satisfaire à une suite d'équations analogues aux précédentes et on voit qu'il y a seize points répondant à cette question.

Donc cinq sphères sont coupées par seize sphères suivant des angles égaux.

Les dix paires de sphères de similitude des sphères données sont dix par dix normales aux sphères demandées.

CHAPITRE III

Angles et distances

ANGLE DE DEUX DROITES

L'angle de deux droites a et b passant par un même point M est donné d'après la formule (4, I), l'hypercône Γ des longueurs nulles étant l'hypercône de centre M tangent à l'absolu. On peut donc remplacer cet hypercône par l'absolu même et on aura

$$6) \quad 2i\varphi = \log R(a, b; \Phi)$$

formule qui nous donne aussi la valeur du k pour les angles de deux droites.

ANGLE DE DEUX HYPERPLANS

Pour avoir l'angle de deux hyperplans u et v on doit appliquer la formule 6) où au lieu de a et b on introduit u et v ; par conséquent il faut mener dans le faisceau u, v les hyperplans tangents à l'absolu. Le rapport anharmonique de ces quatre hyperplans est égal au rapport de leurs pôles. L'angle de deux hyperplans est donc égal à la distance de leurs pôles.

Les droites normales aux hyperplans en un point commun font un angle égal à la distance de deux pôles.

Dans **E** cela veut dire que deux sphères quelconques $[A]$ et $[B]$ sont coupées par une sphère normale à elles suivant deux cercles qui font un angle égal à l'angle de deux sphères données.

ANGLE D'UNE DROITE AVEC UN HYPERPLAN

Considérons un hyperplan h dont le pôle est H et la droite u qui coupe h au point A . Pour avoir l'angle de h avec u on doit prendre

le complément de l'angle des deux droites u et AH , la dernière étant normale à h .

Le plan déterminé par les deux droites coupe h suivant une droite v ; l'angle entre u et v est l'angle cherché.

Dans l'espace E à la droite u correspond un cercle sur la sphère $[A]$; à la normale AH correspond le cercle d'intersection de $[A]$ avec la sphère $[H]$ déterminant l'hyperplan. Par les deux points d'intersection de ces deux cercles on mène un cercle $[x]$ qui est normal à $[H]$; l'angle de ces deux cercles $[u]$ et $[v]$ est le complément de l'angle du cercle $[u]$ avec la sphère $[H]$.

Donc l'angle d'un cercle et d'une sphère est le complément de l'angle de la droite et de l'hyperplan correspondants, le dernier ayant comme pôle le point représentatif de la sphère donnée.

ANGLE DE DEUX PLANS QUI SE COUPENT SUIVANT UNE DROITE

Si la figure formée par ces deux plans est transformée par polaires réciproques par rapport à l'absolu on trouve deux droites qui se coupent en un point. L'angle de deux plans étant donné à l'aide de la formule générale de Cayley on voit qu'il est égal à l'angle de deux droites polaires qui est égal à l'angle des deux cercles correspondants.

DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE

Considérons une droite a et un point A . La distance séparant ces deux éléments est comptée sur la normale à a menée par A . Appelons n cette normale.

Les deux droites u et n sont normales si l'une d'elle se trouve dans l'hyperplan polaire d'un point de l'autre. La première doit donc couper le plan polaire de la seconde et inversement. Réciproquement si deux droites se rencontrant sont telles que l'une coupe le plan polaire de l'autre elles sont normales étant conjuguées par rapport à l'absolu.

Soit AP la normale à la droite « a ». Le point M situé sur « a » et à une distance d'un angle droit de P est conjugué, par rapport à l'absolu, avec tous les points de n car il est conjugué avec deux : le point P et le point d'intersection de n avec le plan polaire de a .

Si α β sont les points d'intersection de n avec l'absolu, le rapport anharmonique (A, P, α, β) est égal au rapport anharmonique des

quatre droites projetant de M les quatre points précédents. Mais comme M et n sont dans leur plan pôle et polaire, les droites $M\alpha$ et $M\beta$ sont tangentes à l'absolu.

Il en résulte que la distance entre A et P , c'est-à-dire la longueur de la normale, est égal à l'angle des droites a et MA , qui est le complément de l'angle de la droite a et de l'hyperplan de pôle A .

Donc la distance d'un point à une droite représente l'angle de la sphère et du cercle correspondants.

Analytiquement, la distance d'un point X à une droite donnée par deux points AB , supposés conjugués avec l'absolu s'exprimera facilement en suivant le raisonnement précédent :

Le point M conjugué avec n et situé sur a est donné par

$$(A + \lambda B, X) = (AX) + \lambda (BX) = 0$$

(AX) étant la forme polaire de Φ par rapport à A et X .

Le pied P de n est donné par

$$(M; A + \mu B) = 0$$

qui fixe la valeur de μ ; on trouve

$$M = (BX) A - (AX) B \text{ et } P = (A) (BX) B + (B) (AX) A$$

(A) étant la valeur de Φ pour le point A .

La distance φ de A à a est donnée par la formule

$$7) \quad (A) (B) (X) \cos^2 \varphi = (AX)^2 (B) + (BX)^2 (A).$$

ANGLE D'UN PLAN ET D'UN HYPERPLAN

Pour avoir l'angle d'un plan π et d'un hyperplan h on doit mener par la droite commune un plan « α » normal à h , c'est-à-dire passant par le pôle H de l'hyperplan et prendre le complément de l'angle des deux plans π et α .

Si on prend la figure polaire réciproque on voit que l'angle des plans π et α est égal à l'angle des deux droites polaires p et a dont la dernière est dans le plan déterminé par H et p et polaire de H dans ce plan.

Cet angle est égal à l'angle entre p et l'hyperplan h .

Donc l'angle d'un plan et d'un hyperplan est représenté par l'angle fait entre le cercle déterminant le faisceau de sphères correspondant au plan et la sphère représentée par le pôle de l'hyperplan.

DISTANCE D'UN POINT A UN PLAN

La distance d'un point A à un plan α est comptée sur la normale au plan menée par A . Cette normale est en général unique et est la droite qui coupe α et sa droite polaire a . Cette droite normale est aussi normale à la polaire a . Soit n cette normale; elle coupe α en P et « a » en Q . La distance cherchée est la distance AP qui est complémentaire de la distance AQ . En effet si i et j sont les points d'intersection de l'absolu avec π on a $(APij) = R$ et $(PQij) = 1$.

En multipliant ces deux rapports on a $(AQij) = -R$.

Introduisant ce rapport dans la formule de Cayley on trouve que AP et AQ sont deux distances différant d'un angle droit.

Normales communes à deux droites

Considérons deux droites a et b ; une normale x à ces deux droites doit couper, outre les droites données, leurs plans polaires α et β .

Si h est l'hyperplan formé par a et b considérons les deux intersections de lui avec α et β , soient u et v .

Les normales demandées doivent donc couper quatre droites $abuv$ situées dans un hyperplan h . On doit donc trouver deux normales communes x et y .

Dans l'espace E les droites x et y de C représentent deux cercles coupant deux cercles donnés chacun en deux points et sous un angle droit. Soient $mnpq$ les axes des cercles $[a]$, $[b]$, $[u]$, $[v]$; les axes des cercles demandés sont les droites qui coupent ces quatre droites (*).

Si les quatre axes m , n , p , q sont dans un même plan, ce qui arrive si m et n se coupent, la construction précédente est en défaut.

On pourra construire les deux cercles $[x]$ et $[y]$ en faisant la traduction de la méthode suivante, suivie dans C .

Pour avoir sur la droite a les pieds des normales communes on doit prendre les points doubles d'une homographie dont les points homologues sont obtenus de la façon suivante :

D'un point M de « a » menons la normale à « C » qui la coupe en P . De P menons la normale à « a » qui la coupe en N . M et N sont

(*) Exercice proposé par M. Hadamard dans ses leçons de géométrie dans l'espace.

deux points homologues de l'homographie dont les points doubles sont A et B. Les normales à « C » menées par A et B la coupent en C et D respectivement. AC et BD sont les normales communes aux deux droites données.

Les deux normales x et y sont polaires réciproques par rapport à la sphère d'intersection de l'absolu avec h . En effet le plan polaire de x doit couper a et b et aussi α, β suivant des droites. Il existe donc dans ce plan une droite coupant les deux droites données et leurs plans polaires donc normale à a et b . Cette droite ne peut être que y donc tous les points de x sont conjugués avec tous les points de y par rapport à l'absolu.

Les cercles représentés par x et y contiennent chacun les foyers de l'autre ; ils sont donc en bi-involution (*). Ils sont déterminés chacun par deux sphères passant respectivement par les cercles donnés, telles que chaque sphère déterminant l'un est normale aux deux autres déterminant le deuxième.

NORMALES COMMUNES A DEUX DROITES QUI SE COUPENT

Considérons deux droites a et b qui se coupent au point I. Les plans polaires α et β se coupent suivant une droite u . Les droites joignant I aux points de u sont des normales communes à a et b .

Dans **E** cela se traduit par la proposition suivante :

Les cercles d'intersection d'une sphère avec les sphères passant par le cercle en bi-involution avec deux cercles situés sur la première sont orthogonaux avec les derniers.

En revenant dans l'espace **C** on voit qu'il existe encore une normale commune aux droites a et b : c'est la droite joignant les deux points U, V d'intersection du plan ab avec les deux plans α, β . Cette droite coupe a et b en deux points A et B conjugués chacun avec I. La distance entre U et V est égale à la distance entre A et B qui est la longueur de la normale commune. La longueur UV est égale à l'angle de a et b , donc la normale commune est égale à l'angle de deux droites.

Le cercle représenté par la droite AB est normal aux deux cercles $[a]$ et $[b]$ et passe par leurs points communs.

(*) Dénomination proposée par G. Kœnigs. — Contribution à la théorie du cercle dans l'espace, *Ann. de Toul*, 1888.

ANGLE DE DEUX CERCLES QUI SE COUPENT EN UN SEUL POINT.

Deux cercles en $\mathbf{E}$ qui se coupent en un point $[H]$ sont représentés en $\mathbf{C}$ par deux droites a, b dont l'hyperplan est tangent à l'absolu au point H .

Les plans polaires de ces deux droites coupent l'hyperplan h déterminé par a et b , suivant deux droites u, v se coupant en H . Les normales communes aux deux droites a et b doivent couper les quatre droites a, b, u, v . Une des normales est la droite passant par H et coupant a et b ; elle est tangente à l'absolu, donc sa longueur est nulle. Pour avoir la deuxième normale commune on prend la droite n qui passe par les points d'intersection du plan uv avec les deux droites a et b . La droite n coupe a et b en A et B et u, v en U, V . La distance AB est égale à la distance UV car AU et BV sont deux paires de points conjugués avec l'absolu.

Dans l'espace $\mathbf{E}$ la première normale est équivalente au cercle d'intersection de deux sphères passant par $[a]$ et $[b]$ et tangentes au point H . Les centres de deux sphères sont sur la droite qui passe par H et coupant les axes des deux cercles donnés.

Les sphères $[A]$ et $[B]$ normales aux précédentes déterminent le cercle $[n]$ représenté par n et qui est normal aux deux cercles donnés.

L'angle de ces deux sphères étant égal à l'angle des sphères représentées par les points U et V , lesquelles sont normales aux cercles donnés, il en résulte que la longueur de la seconde normale représente l'angle de ces deux cercles.

NORMALES COMMUNES A DEUX DROITES EN INVOLUTION

Soient deux droites a, b telles que a coupe au point A le plan β polaire de la droite b , il en résulte, par l'application des polaires réciproques, que b coupe par exemple en B le plan α , polaire de la droite a .

La droite AB est normale aux deux droites a et b . Pour construire la seconde normale commune on prend sur a et b les deux points M, N conjugués respectivement avec A et B par rapport à l'absolu; la droite MN est la seconde normale cherchée.

La longueur de la première normale est d'un angle droit.

Si la normale MN coupe α et β en V et U , la longueur MU est égale à l'angle entre la droite a et le plan β . En effet, dans le plan

AMN la droite MN est polaire du point A, donc l'angle MAN est égal à la distance MN; l'angle MAN est aussi par définition l'angle complémentaire de l'angle de α et β car il est formé par la droite a avec la normale à β menée dans l'hyperplan déterminé par α et β .

DIVERS PROBLÈMES SUR LES NORMALES A DEUX DROITES

Deux droites quelconques a et b n'admettent en général qu'une seule paire de droites en bi-involution les coupant : c'est la paire de droites x, y normales communes à a et b .

Considérons une transformation homographique, dans l'hyperplan h déterminé par les deux droites a et b , qui conserve les deux droites x et y entièrement et l'intersection « τ » de l'absolu avec h . Les droites qui coupent x et y doivent rester fixes et leurs points subissent des involutions dont les points doubles sont les points sur x et y . Une droite quelconque m coupant les droites a, b et τ dont la dernière est la polaire de a par rapport à τ se transforme en une droite n conjuguée harmoniquement avec m par rapport aux deux droites x, y .

Les rapports anharmoniques devant se conserver on arrive à la conclusion que les points de b qui sont à une même distance de la droite a sont conjugués harmoniquement avec les points d'intersection de b avec x et y .

Les interprétations dans **E** sont immédiates.

CHAPITRE IV

Hypersphère

On appelle hypersphère le lieu des points à égale distance d'un point donné. Cette distance fixe est le rayon.

Si le centre est le point O et le rayon égal à θ , l'équation de l'hypersphère est

$$1) \quad \Sigma = (OX)^2 - \cos^2 \theta (O) (X) = 0$$

Ce lieu représente l'ensemble des sphères $[X]$ faisant un angle θ avec une sphère fixe $[O]$.

L'intersection de Σ avec l'absolu est donnée par les équations

$$2) \quad (X) = 0 \quad (OX)^2 = 0$$

Elle représente le lieu des sphères de rayon nul orthogonales à la sphère $[O]$ donc ayant leur centre sur cette dernière sphère.

Les points de l'hypersphère (1) sont, ou tous à l'intérieur de l'absolu, ou tous à l'extérieur, car le signe de (X) est le signe du produit $(O) \cos^2 \theta$.

L'hypersphère Σ est tangente à l'absolu le long de la quadrique d'intersection 2) car les dérivées des formes quadratiques Σ et Φ par rapport aux coordonnées du X sont égales pour 2). On voit donc qu'une hypersphère est une hyperquadrique tangente à l'absolu le long d'une sphère.

INTERSECTION D'UNE HYPERSPHERE PAR UN HYPERPLAN

Les points qui se trouvent dans un hyperplan et à une distance donnée d'un point fixe forment une multiplicité à deux dimensions de second degré; une droite contenue dans l'hyperplan la coupe en deux points.

Si le pôle de l'hyperplan est P , le centre de l'hypersphère O et le

rayon θ , l'intersection de l'hypersphère par l'hyperplan a les équations

$$3) \quad (OX)^2 - \cos^2 \theta (O) (X) = 0 \quad (PX) = 0$$

Ces équations représentent dans **E** le lieu des sphères coupant une sphère [P] à angle droit et une autre sphère [O] suivant un angle θ .

Si la sphère [P] ne se réduit pas à un plan, on peut fixer chaque sphère du lieu précédent par son centre car la sphère dont le centre est donné et qui est normale à une autre est bien déterminée.

Le lieu des centres de ces sphères est une surface de second degré car une droite quelconque ne la coupe pas qu'en deux points. En effet, une droite quelconque ne peut que d'une seule manière être considérée comme l'axe d'un cercle normal à la sphère [P] et il n'y a que deux sphères passant par lui et coupant la sphère [O] suivant l'angle θ .

Le lieu des centres des sphères représentées par 3) est une surface du second degré qui est de révolution autour de l'axe passant par les centres des sphères [O] et [P].

La surface 3), en **C**, est tangente à l'absolu le long de la courbe d'intersection

$$4) \quad (OX) = 0 \quad (X) = 0 \quad (PX) = 0$$

qui représente le lieu des points [X] sur le cercle commun aux sphères [P] et [O]. L'absolu est coupé par l'hyperplan $(PX) = 0$ suivant la surface représentant le lieu des points sur la sphère [P]. La surface 3) est tangente à cette surface.

Comme tous les points de l'hyperplan $(PX) = 0$ peuvent être liés uniquement et réciproquement avec tous les points de **E** on voit que le lieu des sphères (X) représenté par 3) est tangente à la sphère [P] le long du cercle représenté par 4). Ce lieu étant une surface du second degré de révolution, il sera bien déterminé par un point quelconque.

Si le cercle [PO] est imaginaire on aura la quadrique de révolution, lieu des centres des sphères coupant [O] et [P] respectivement suivant un angle droit et l'angle θ , si on construit dans un plan méridien cinq points. On construira après la conique, déterminée par ces cinq points, qui en tournant autour de l'axe mentionnée engendre la quadrique cherchée.

Tous les points de la normale à l'hyperplan $(PX) = 0$, menée par le centre O, sont équidistants des points de l'intersection de l'hyperplan avec l'hypersphère.

En effet, un point de la droite PO , qui est la normale à l'hyperplan donné est $M = O + \lambda P$.

Pour les points X de l'intersection on a

$$(MX) = (OX)$$

Donc le carré de (MX) est proportionnel à (X) , ce qui signifie que les points de l'intersection sont à une distance égale du point M .

Si ω est le point d'intersection de la normale OP avec l'hyperplan $(PX) = 0$ on voit que l'intersection est le lieu des points d'un hyperplan à une distance constante d'un point de cet hyperplan. Nous appelons cette figure une sphère (dans $\mathbf{C}$).

On peut donc dire que les intersections d'une hypersphère par un hyperplan sont des sphères dont les centres sont les pieds des normales menées par le centre de l'hypersphère à ces hyperplans.

Une sphère est donc une quadrique, tangente à l'absolu le long d'un cercle.

INTERSECTION D'UNE HYPERSPHERE PAR UN PLAN

L'intersection d'une hypersphère Σ avec un plan, dont les équations sont donc

$$5) \quad \Sigma = 0 \quad (AX) = 0 \quad (BX) = 0$$

représente le lien des sphères normales à un cercle $[AB]$ et coupant une sphère $[O]$ suivant un angle constant.

Les points du plan déterminé par les points A, B, O sont équidistants des points d'intersection 5) car, les points de ce plan étant donné par la formule

$$M = O + \lambda A + \mu B, \text{ on a } (MX) = (OX)$$

pour les points X satisfaisant à 5).

L'intersection de ce plan avec le plan donné est un point ε à égale distance de tous les points 5). On appelle le lieu 5) un cercle et le point ε son centre. Le centre ε représente la sphère normale au cercle $[AB]$ et passant par les points d'intersection du dernier cercle avec la sphère $[O]$. Si le plan donné n'est pas l'image de l'ensemble des sphères orthogonales à une droite, chacun de ces points peut représenter les points du plan $[AB]$ dans $\mathbf{E}$, les derniers étant les centres des sphères correspondantes aux premiers.

Le lieu des centres des sphères $[X]$ correspondant au lieu 5) est

une conique tangente au cercle $[AB]$ en deux points fixes et dont un axe est la droite joignant le centre de ce cercle avec le centre de la sphère $[\varepsilon]$.

Un cercle est donc une conique bitangente à l'absolu.

INTERSECTION D'UNE DROITE AVEC UNE HYPERSPHERE (*)

Considérons une hypersphère Σ et une droite d . L'intersection est formée de deux points, donc dans $\mathbf{E}$ il n'existe que deux sphères passant par un cercle, qui coupent une autre sphère suivant un angle donné. L'ensemble des sphères normales à un cercle $[\gamma]$, en bi-involution avec le cercle $[d]$ est représenté en $\mathbf{C}$ par un plan π passant par d . L'intersection de π avec Σ est un cercle (en $\mathbf{C}$). Ses points représentent les sphères dont les centres décrivent dans le plan du cercle $[\gamma]$ une conique bi-tangente à lui. L'intersection de cette conique avec l'axe du cercle donné fournit les centres de deux sphères demandées.

VARIATIONS DU RAYON ET DU CENTRE D'UNE HYPERSPHERE

Si le rayon est nul l'hypersphère est l'hypercône tangent à l'absolu et de centre O . Son équation est

$$6) \quad (OX)^2 - (O)(X) = 0$$

Il représente le lieu des sphères tangentes à la sphère $[O]$.

On peut dire que cette hypersphère est isotrope par analogie avec le cône isotrope en $\mathbf{E}$.

Par l'intersection σ d'une hypersphère Σ avec un hyperplan h passent deux hypersphères isotropes. Leurs centres sont la représentation des sphères tangentes aux sphères représentées par les points de σ (**). En effet si

$$7) \quad \Sigma = (OX)^2 - K(X) = 0 \quad h = (HX) = 0$$

sont les équations de la sphère, on voit que l'équation

$$(O + \lambda H, X)^2 - (O + \lambda H)(X) = 0$$

qui peut s'écrire encore $K = (O) + 2\lambda(OH) + \lambda^2(HH)$, donne deux

(*) DARBOUX. — *Ann. de l'Ecole normale*. T. I, 2 s, 1872.

(**) DARBOUX. — *Principes de géométrie analytique*. Les coordonnées pentasphériques.

valeurs pour λ fixant les centres des hypersphères isotropes passant par 7).

Si le centre de Σ est à l'extérieur de l'absolu et le rayon réel, l'hypersphère est extérieure à l'absolu et en variant le rayon on trouve un faisceau d'hypersphère tangente à l'absolu suivant une même sphère et toutes extérieures à l'hypercône isotrope de même centre.

Pour les rayons imaginaires pures ou complexes avec un multiple de π comme partie réelle les hypersphères sont à l'extérieur de l'absolu et à l'intérieur de l'hypercône isotrope.

Pour les rayons complémentaires les hypersphères sont à l'intérieur de l'absolu.

Si le centre de l'hypersphère est sur l'absolu, pour avoir une figure différente d'un hyperplan tangent à Φ il faut que le rayon soit infini.

Son équation est

$$8) \quad (CX)^2 - K(X) = 0 \quad \text{avec } (C) = 0$$

Si K varie on a une famille des hypersphères ayant un contact du troisième ordre au point C de l'absolu.

GÉNÉRATRICES RECTILIGNES DE L'HYPERSPHÈRE

Si une droite a trois points communs avec une hypersphère elle y est appliquée entièrement. L'intersection d'une hypersphère Σ avec un hyperplan t tangent à elle est formé par un cône de second degré car si U est le point de contact et M un point de l'intersection de h avec Σ , la droite UM a trois points communs avec Σ , dont deux sont confondus en U .

Une hypersphère de centre O et passant par U a l'équation

$$9) \quad \Sigma = (U)(OX)^2 - (OU)^2(X) = 0$$

L'hyperplan tangent à Σ en U a l'équation

$$10) \quad (U)(OX) - (OU)(UX) = 0$$

Cet hyperplan est normal à la droite OU car son pôle

$$T = (U)O - (OU)U$$

est sur cette droite.

Une droite du cône donné par les équations 9) et 10) est isotrope c'est-à-dire tangente à l'absolu.

En effet on déduit de ces équations que

$$(UX)^2 = (U)(X)$$

ce qui montre que les droites du cône précédent sont tangentes à l'absolu. On aurait pu voir que le cône des génératrices rectilignes de l'hypersphère est isotrope en observant que Σ est elle-même tangente à l'absolu, donc leurs intersections par l'hyperplan « t » sont aussi tangentes.

L'intersection du cône de centre U avec l'absolu est le cercle

$$(OX) = 0 \quad (TX) = 0 \quad (X) = 0$$

qui représente dans $\mathbf{E}$ le cercle déterminé par la sphère $[O]$ et la sphère $[U]$. Le cône isotrope représente la totalité des sphères tangentes à la sphère $[U]$ aux points du cercle $[UO]$.

GÉNÉRATRICES RECTILIGNES DE LA SPHÈRE

Si par le point U de l'hypersphère 9) on fait passer un hyperplan h , celui-ci coupe Σ suivant une sphère et l'hyperplan t suivant un plan π . Ce plan coupe le cône isotrope U suivant deux génératrices qui sont les génératrices rectilignes de la sphère. Ces deux droites représentent les deux faisceaux de sphères, déterminés par la sphère $[U]$ et les deux points d'intersection du cercle $[OU]$ avec la sphère $[H]$.

INTERSECTION DES HYPERSPHÈRES

Considérons deux hypersphères α et β

$$\alpha = (AX)^2 - a^2 (X) = 0$$

$$\beta = (BX)^2 - b^2 (X) = 0$$

Les points communs à α et β satisfont aux deux équations :

$$b (AX) + a (BX) = 0 \quad b (AX) - a (BX) = 0$$

donc deux hypersphères se coupent suivant deux sphères.

Elles se trouvent dans deux hyperplans dont les pôles sont sur la droite AB et conjugués harmoniquement avec les deux points centres de α et β .

Les points communs à α et β représentent les sphères coupant deux sphères $[A]$ et $[B]$ suivant des angles donnés.

Si on considère trois hypersphères $\alpha \beta \gamma$, leur intersection est situé dans les quatre plans

$$b (AX) \pm a (BX) = 0; \quad c (BX) \pm b (CX) = 0; \quad a (CX) \pm c (AX) = 0$$

la troisième équation devant être une combinaison des deux autres.

Ces quatre plans coupent une des hypersphères suivant quatre cercles qui représentent les sphères $[X]$ coupant trois sphères fixes suivant des angles donnés.

Quatre hypersphères $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, se coupent suivant seize points situés sur les huit droites dont les équations pourraient être écrites sous la forme abrégée

$$b \pm a, \quad c \pm b, \quad d \pm c, \quad c \pm a$$

la dernière étant une combinaison des trois autres.

Ces seize points représentent les sphères qui coupent quatre sphères données suivant quatre angles donnés.

Hypercylindre

On appelle hypercylindre le lieu des points à égale distance d'une droite d .

Nous avons vu que les points X à une distance θ d'une droite déterminée par deux points conjugués avec l'absolu, doivent satisfaire à l'équation

$$1) \quad H = (B) (AX)^2 + (A) (BX)^2 - (A) (B) \cos^2 \varphi (X) = 0$$

L'intersection de H avec l'absolu se compose de deux cônes de l'absolu ayant pour sommets les foyers de la droite AB .

Si la droite AB ne coupe pas l'absolu, son plan polaire

$$2) \quad (AX) = 0 \quad (BX) = 0$$

le coupe suivant un cercle réel.

Les points d'un hypercylindre représentent les sphères en $\mathbf{E}$ qui coupent un cercle donné $[AB]$ suivant un angle fixe φ .

L'hypercylindre H est tangent à l'absolu aux deux points d'intersection de d avec lui. Il est tangent aussi le long du cercle d'intersection du plan polaire de d avec l'absolu.

Les hyperplans normaux à la droite d coupent H suivant des sphères de même rayon φ . Les plans situés dans ces hyperplans coupent H suivant des cercles.

Un plan « p » mené par la droite d coupe H aussi suivant un cercle car l'intersection est bitangente à l'absolu. Son centre est le point O d'intersection du plan polaire 2) avec p et son rayon égal au

complément de z , car les droites passant par O , dans p , sont normales à d et les points à une distance φ de d sont à une distance complémentaire du point O , pôle de d .

HYPERCYLINDRE DE RAYON NUL

Si on considère les points à une distance nulle d'une droite donnée d , ils représentent en E les sphères tangentes à un cercle $[d]$.

Cet hypercylindre peut aussi être considéré comme le lieu des points des plans menés par d et tangents à l'absolu.

Si d est déterminée par deux points AB , conjugués avec l'absolu, le plan polaire coupe l'absolu suivant les points

$$3) \quad (AX) = 0 \quad (BX) = 0 \quad (X) = 0$$

Un plan quelconque tangent à l'absolu et contenant la droite d est déterminé par les deux points AB et un des points X satisfaisant à 3). En effet si U est un point du lieu 3), un point du plan ABU est

$$4) \quad Y = \lambda A + \mu B + \nu U$$

Ce plan passe par un point U de l'absolu et est contenu dans l'hyperplan tangent à Φ en ce point $(UX) = 0$.

En exprimant que U se trouve sur le cercle 3) on a l'équation 1) sans le facteur $\cos \varphi$.

INTERSECTION D'UN HYPERCYLINDRE PAR UNE DROITE

Soit $H(X) = 0$ un hypercylindre et « d » une droite donnée par deux de ses points A, B . L'équation $H(X) = 0$ étant du second degré, il existe sur la droite AB deux points M, N qui satisfont à l'équation de l'hypercylindre. Dans l'espace E il existe donc deux sphères passant par un cercle $[d]$ et faisant avec un cercle donné un angle donné. Les sphères passant par $[d]$, conjuguées harmoniquement avec l'hypercylindre et l'absolu sont représentées en C par les pieds des normales communes à la droite d et l'axe de l'hypercylindre.

Si par l'axe a de l'hypercylindre et la droite d on mène l'hyperplan « l » déterminé par elles, il coupe l'hypercylindre H suivant une quadrique qui est tangente à l'absolu aux points RS d'intersection de « a » avec l'absolu et aux points Q, T d'intersection de « l » avec le cercle 3).

Les centres des sphères représentées par les points de l'hyperplan l déterminent complètement ces sphères à moins que la sphère $[L]$ correspondant au pôle L de l'hyperplan ne se réduise à un plan. Il en résulte que la quadrique « γ » d'intersection de H avec l a comme analogue en E une quadrique $[\gamma]$ qui est le lieu des centres des sphères correspondant aux points de la première quadrique.

La quadrique $[\gamma]$ est tangente à la sphère $[L]$ aux quatre points d'intersection de cette sphère avec l'axe du cercle $[a]$ et sa droite polaire réciproque par rapport à $[L]$. Pour que $[\gamma]$ soit bien déterminée il faut encore le centre d'une sphère normale à $[L]$ et coupant le cercle $[a]$ suivant l'angle φ . Les deux points d'intersection de $[\gamma]$ avec l'axe du cercle $[d]$ sont les centres des sphères demandées.

On peut donc réduire la construction des sphères passant par un cercle et faisant un angle donné avec un autre cercle à la construction des points d'intersection d'une droite et une quadrique passant par l'intersection d'une sphère et deux plans tangents.

Généatrices rectilignes de l'hypercylindre et cercles paratactiques

Considérons un hypercylindre donné par son axe « a » et son rayon φ , la droite « a » étant déterminée par deux points A et B conjugués par rapport à l'absolu.

$$H = (AX)^2 : (A) + (BX)^2 : (B) - \cos^2 \varphi (X) = 0$$

Menons l'hyperplan v tangent à H au point U

$$5) \quad v = H(UX) = 0$$

L'intersection de v avec H est un cône du second degré et dont le sommet est le point U . Les génératrices de ce cône, ayant leurs points à une même distance φ de la droite « a », représentent en E les cercles $[d]$ situés sur la sphère $[U]$ et tels que toutes les sphères passant par eux font avec le cercle $[a]$ le même angle φ .

Un de ces cercles $[d]$ avec le cercle $[a]$ forment un groupe de deux cercles paratactiques (*). Les foyers de $[d]$ sont sur les cônes isotropes passant par le cercle $[a]$ car dans C la droite d coupe deux

(*) A. BLOCH. — Les cercles paratactiques et la cyclide de Dupin. *Journ. de Math.*, 1924.

génératrices de l'absolu qui passent respectivement par les deux foyers de la droite a .

Le pôle de v est le point

$$V = (AU) : (A). A + (BU) : (B). B - \cos^2 \varphi. U$$

qui est donc sur la normale menée par U à l'axe de l'hypercylindre. Donc la normale à la droite « a » menée par U est aussi orthogonale à toutes les génératrices rectilignes de H qui passent par U .

Les génératrices d'un hypercylindre forment une multiplicité à trois dimensions car par chaque point de H on peut faire passer une simple infinité de génératrices, chacune passant par une simple infinité de points.

RÉCIPROCITÉ DES CERCLES PARATACTIQUES

Soient a et b l'axe et une génératrice d'un hypercylindre. Menons d'un point U de b la normale à a qui la coupe en P ; la droite UP est aussi normale à b . Donc les points de b sont à une même distance φ des points de a et inversement les points de a sont à la même distance φ de la droite b .

Les sphères passant par le cercle $[b]$ ou $[a]$ font respectivement avec les cercles $[a]$ et $[b]$ le même angle φ .

Considérons deux droites paratactiques $a b$; leur hyperplan coupe leurs plans polaires suivant deux droites $\alpha \beta$ qui sont avec $a b$ sur une surface réglée du deuxième ordre car il existe une infinité de droites les coupant toutes les quatre, savoir les normales à a et b . Ces normales forment le second système de génératrices de la surface.

Dans le premier système il existe deux génératrices qui divisent harmoniquement les deux paires a, α et b, β ; ces deux génératrices sont deux génératrices de l'absolu. Si par les points d'intersection de a avec l'absolu on mène les génératrices de la seconde classe elles sont aussi deux génératrices de l'absolu car elles ont avec lui trois points communs. Donc deux droites paratactiques doivent couper deux génératrices de l'absolu ne se coupant pas. Réciproquement, si deux droites $a b$ coupent deux génératrices de l'absolu $x y$ qui ne se coupent pas, sont paratactiques. Les droites $x y$ coupent aussi les plans polaires de deux droites a, b en déterminant aussi deux droites α, β en bi-involution avec a et b . Ces quatre droites sont sur une surface réglée car les rapports anharmoniques des points d'intersection de x et y avec les quatre droites sont égaux.

CONSTRUCTION DES CERCLES PARATACTIQUES

Considérons un hypercylindre H dont l'axe est « a » et le rayon φ . Soit « v » l'hyperplan tangent à H au point U et « m » un hyperplan dont le pôle M est situé sur l'axe. Les deux hyperplans se coupent suivant un plan π .

L'intersection avec H est un cercle f . Les droites projetant les points du f du point U sont les génératrices du cône I , intersection de H et v .

L'hyperplan v coupe le cercle d'intersection de l'absolu avec le plan polaire de « a » en deux points qui avec U déterminent deux génératrices du I . Ce cône est en ces deux points tangent à l'intersection de l'absolu avec v , donc il est bien déterminé si on se donne un autre point.

Dans **E** on aura la construction suivante pour les cercles paratactiques avec un cercle $[a]$, situés sur une sphère $[U]$ et faisant avec $[a]$ l'angle de parataxie φ .

Considérons sur $[U]$ le cercle orthogonal à $[a]$ et menons par lui la sphère $[V]$ normale à $[U]$; prenons l'intersection de cette sphère avec une sphère $[M]$ passant par le cercle donné. Les sphères normales au cercle $[MV]$ et faisant avec la sphère $[N]$ du faisceau donné, normale à $[M]$, un angle égal à φ , coupent la sphère $[U]$ suivant des cercles paratactiques avec $[a]$. Ces cercles sont normaux à la sphère $[V]$ et leurs axes passent par le centre de la sphère $[U]$; elles engendrent un cône du second degré tangent à la sphère $[V]$ aux points où celle-ci coupe le cercle $[a]$.

Une autre méthode pour la construction des droites paratactiques est celle-ci.

Considérons sur une droite a deux points A et C conjugués avec l'absolu et dans le plan polaire de a deux points U , S , également conjugués et déterminant la droite z . Les deux droites $x = UA$ et $y = SC$ sont en bi-involution (tous les points de l'une sont conjugués avec tous les points de l'autre).

Prenons sur x deux points conjugués B , V et sur y deux points aussi conjugués D , T tels que les rapports anharmoniques $ABUV$ et $CDST$ soient égaux. Les droites $b = BD$ et $\beta = VT$ sont en bi-involution.

Les quatre droites $a b z \beta$ sont sur une surface réglée du second degré. Toutes les génératrices du système différent sont des normales communes à a et b et de même longueur.

Les deux droites a et b ainsi construites sont donc paratactiques.

Dans l'espace C on a la traduction suivante :

Prenons deux sphères normales $[A]$, $[C]$ passant par un cercle donné $[a]$. Parmi les sphères normales à ce cercle prenons deux sphères $[U]$, $[S]$ normales entre elles. Les deux cercles d'intersection des paires des sphères $[AU]$ et $[CS]$ sont en bi-involution. Faisons passer par le premier cercle $[x]$, une sphère $[B]$ et sa sphère normale $[V]$ telle que l'angle de $[A]$ et $[B]$ soit φ . Par le deuxième cercle $[y]$ faisons passer les sphères $[D]$ et $[T]$ normales entre elles et telles que les rapports anharmoniques $(ABUV)$ et $(CDST)$ soient égaux ; cela entraîne pour l'angle (C, D) la valeur φ . Le cercle $[a]$ est paratactique avec le cercle $[b]$ d'intersection de $[B]$ avec $[D]$.

En revenant dans l'espace C on voit que, pour une distance de parataxie donnée, une droite b paratactique avec une droite fixe a , est bien déterminée si on a construit les deux droites x et y . On peut choisir ces deux droites d'une triple infinité de manières, le point U pouvant être un point quelconque du plan polaire de a et lui, une fois fixé le point S pouvant être choisi parmi les points de la droite polaire de U (dans ce plan). Les droites b forment donc une multiplicité à trois dimensions comme nous l'avons déjà montré.

On observe par cette construction que deux droites a , b dont les longueurs des normales communes sont égales forment un couple paratactique.

Propriétés des cercles paratactiques

Considérons deux droites paratactiques a et b et sur elles deux paires de points conjugués A , B et C , D . D'après l'équation même de l'hypercylindre on a la somme des carrés des cosinus des distances AC et AD égale au carré du cosinus de l'angle φ et à la somme des carrés des cosinus des distances CA et CB . Donc les distances AD et CB sont égales ; de même on voit que AC et BD sont aussi égales.

Considérons sur chacun de deux cercles paratactiques donnés une paire de sphères orthogonales ; l'angle fait par deux de ces quatre sphères est égal à l'angle des deux autres.

Les angles faits par deux droites paratactiques a , b avec une droite x les coupant sont égaux. En effet si on prend sur chacune une

paire de points conjugués A, B et C, D, A et C déterminant la droite x , en désignant par **A** (X) l'hypercône isotrope de sommet A, on a

$$\mathbf{A}^2 (\mathbf{C} \mathbf{B}) \mathbf{C} (\mathbf{A}) \mathbf{C} (\mathbf{D}) = \mathbf{C}^2 (\mathbf{A} \mathbf{D}). \mathbf{A} (\mathbf{C}). \mathbf{A} (\mathbf{B})$$

Donc un cercle cosphérique avec deux cercles paratactiques fait avec les derniers deux angles égaux (*).

Considérons deux normales communes à deux droites paratactiques a et b . Ces normales, que nous désignons par u , v , coupent chaque droite a et b en deux points A, B et C, D tels que leurs distances sont les mêmes.

En effet dans le système des génératrices u , v etc. de la surface réglée contenant a , b il se trouve une paire de génératrices situées sur l'absolu. Les deux droites a et b sont coupées par u v et les génératrices de l'absolu chacune en quatre points ayant un même rapport anharmonique, donc les distances AB et CD sont égales.

Supposons deux droites paratactiques a , b qui coupent les deux génératrices de l'absolu i , j aux points E, F, sur a et G, H sur b . Soit x une droite quelconque qui coupe a et b aux points M et N. Par l'intersection de l'absolu avec x on peut mener deux génératrices de l'absolu g et h , qui coupent i et j . Les droites g , h , a , b , sont sur une surface réglée du second degré car elles admettent trois droites les coupant, savoir i , j et x . Soit y une droite du dernier système, elle coupe a et b aux points L, P. Les droites x et y sont paratactiques car elles coupent deux génératrices g et h de l'absolu.

Les distances LM et PN sont égales, les rapports anharmoniques EFML et GHNP étant égaux.

Inversement si les rapports anharmoniques sont égaux, les droites x et y sont paratactiques.

Les distances MN et LP sont égales, aussi les angles de a avec x et y .

Dans l'espace **E**, en désignant les figures correspondantes par les mêmes lettres qu'en **C**, on a la proposition suivante :

Considérons deux paires de sphères LM et PN faisant un même angle et passant respectivement par deux cercles paratactiques a et b .

(*) A. BLOCH.

Les cercles d'intersection de M et N et de P et N sont paratactiques à moins que ce ne soit les cercles MP et LN (*).

On observe que les droites paratactiques jouissent des mêmes propriétés que les droites parallèles dans E.

(*) BLOCH.

CHAPITRE V

Application d'un plan de l'espace $\mathbf{C}$ sur une sphère de rayon un

Nous avons vu qu'un plan de cet espace a la courbure égale à plus un, donc il est applicable d'une triple infinité de manières sur une sphère de rayon un. Nous donnerons une démonstration géométrique de la possibilité de cette application ce qui entraînera pour l'espace $\mathbf{C}$ l'égalité de sa courbure à plus un.

Les points d'un plan π de $\mathbf{C}$ représentent en $\mathbf{E}$ les sphères passant par deux points $[U]$ et $[V]$ et, par conséquent normales au cercle γ ayant les deux points ci-dessus comme foyers.

Chaque point A du plan π peut être représenté par un point « a » du plan p , contenant γ , le point a étant le centre de la sphère $[A]$. Pour que les plans p et π soient applicables il faut que la distance de deux points a et b de p soit égale à la distance des points homologues de π ; il faut donc que la distance ab soit égale à l'angle $a[U]b$.

Menons dans le plan p deux axes rectangulaires xy ; la distance de deux points infiniment voisins x, y et $x + dx, y + dy$ doit donc être donné par la formule

$$1) \quad \varphi^2 ds^2 = d\tau^2 - d\varphi^2$$

$d\tau$ étant l'élément linéaire euclidien et φ la distance euclidienne du point $[U]$ au point de coordonnées (xy) (*).

La formule 1) donne le ds d'un espace à courbure $+1$.

(*) Formule donnée par E. BELTRAMI — Ann. Sc. de l'Ec. Normale Sup., 1869. *Théorie fondamentale des espaces à courbure constante.*

La distance de deux points a et b est égale à l'angle $a [U] b$ donc elle peut être donnée, en employant la formule de Laguerre, par l'expression

$$2) \quad 2i. ab = \log R(ab, \gamma).$$

γ étant l'intersection du plan p avec le cône isotrope de sommet $[U]$. La géométrie du plan p , applicable sur π , est aussi cayleyenne, l'absolu étant le cercle γ .

L'angle de deux droites du plan p doit s'exprimer par une formule analogue à 2) qu'on peut vérifier directement en se reportant à la signification géométrique de cet angle.

Considérons la sphère σ de centre $[U]$ et de rayon égal à l'unité; projetons sur cette sphère, du point U , tous les points du plan p . Si α et β sont les projections de deux points a et b du p , la distance $\alpha\beta$ comptée sur un grand cercle est égale à la distance ab . Le plan p est donc applicable sur la sphère σ . Les plans π et p étant aussi applicables l'un sur l'autre, il en résulte qu'un plan π de $\mathbf{C}$ est applicable sur une sphère de rayon 1 (*).

La courbure de l'espace $\mathbf{C}$ est donc constante et égale à l'unité.

PLANS ISOTROPES

Les considérations précédentes sont en défaut pour le cas d'un plan isotrope, c'est-à-dire tangent à l'absolu en un point quelconque T .

La métrique d'un plan isotrope de $\mathbf{C}$ est analogue à celle d'un plan isotrope de $\mathbf{E}$ en ce sens que les distances mutuelles de trois points A, B, C jouissent de la propriété additive

$$3) \quad AB + BC + CA = 0$$

En effet si α et β sont les deux génératrices de l'absolu contenues dans le plan donné et a, b, c les droites projetant du point T les trois points $A B C$ on a la relation

$$4) \quad 2i(AB + BC + CA) = \log(\alpha\beta ab) + \log(\alpha\beta bc) + \log(\alpha\beta ca) = 0$$

Un plan isotrope de $\mathbf{C}$ correspond en $\mathbf{E}$ à l'ensemble des sphères tangentes au même point à une droite. Les angles de trois de ces sphères satisfont bien à la relation ci-dessus.

(*) Méthode employée par F. Klein pour montrer l'équivalence des géométries sur un plan cayleyen et sur une sphère.

TRIGONOMÉTRIE

Un plan π de $\mathbf{C}$ pouvant être appliqué sur une sphère de rayon un, les relations entre les six éléments d'un triangle $A B C$ sont les mêmes que pour une sphère.

Si a, b, c désignent les longueurs des côtés opposés aux points $A B C$ on a les relations

$$5) \quad \cos a = \cos b \cos c \pm \sin b \sin c \cos A$$

et celles déduites par permutations circulaires. On a aussi

$$6) \quad \sin a : \sin b : \sin c = \sin A : \sin B : \sin C$$

Ces formules peuvent d'ailleurs se déduire directement.

Exemples :

Le carré du cosinus de l'angle d'une sphère avec un cercle est égal à la somme des carrés des cosinus des angles de cette sphère avec deux sphères orthogonales passant par le cercle (*).

En effet, considérons dans $\mathbf{C}$ un point M et deux points conjugués A, P situés sur une droite donnée « a ». Menons la normale à a , passant par M ; soit P le point où elle coupe a .

Dans les triangles MAP et MBP on a les relations

$$\cos AM = \cos MP. \cos AP \text{ et } \cos BM = \cos MP. \cos BP$$

En élevant au carré et ajoutant, comme les distances AP et BP sont complémentaires, on trouve la relation annoncée.

Le carré du sinus de l'angle de deux cercles qui se rencontrent en deux points est égal à la somme des carrés des sinus des angles formés par l'un des cercles avec deux sphères orthogonales passant par l'autre (*).

Considérons pour cela deux droites en $\mathbf{C}$, x et y qui se coupent au point O en faisant un angle ω .

Menons par deux points A, B , conjugués avec l'absolu et situés sur x , les normales à y ; soient P et Q les points où elles coupent la dernière droite.

Dans les triangles rectangles OAP et OBQ on a les relations

$$\sin AP = \sin \omega. \sin OA$$

$$\sin BQ = \sin \omega. \sin OB$$

trouvées par l'application de la formule 6).

(*) M. VESSIOT. — *Journal de Math.*, 1923. Contribution à la géométrie conforme, cercles et surfaces cerclées.

En élevant au carré et ajoutant on trouve la relation annoncée.

Les diverses propriétés des cercles paratactiques peuvent être déduits aussi à l'aide de la trigonométrie.

RELATIONS ENTRE LES ÉLÉMENTS D'UN TRIÈDRE

Considérons trois droites x, y, z , dans C et passant par un même point I . L'hyperplan polaire de I coupe ces trois droites aux points A, B, C respectivement.

Les angles de trois droites données sont égaux aux distances séparant les trois points d'intersection et les trois angles des plans formés par les droites données prises deux à deux sont égaux aux angles du triangle ABC .

Les relations entre les éléments du trièdre sont donc les mêmes que dans l'espace euclidien.

En passant dans l'espace E on trouve les relations qui existent entre les angles de trois cercles situés sur une sphère et les angles des cercles normaux à cette sphère et passant par les intersections de trois cercles donnés pris deux à deux.

Déplacements dans C

Un déplacement dans un espace est une transformation ponctuelle telle que les distances homologues soient égales. Cela n'est possible que si la courbure de Riemann est constante.

Dans l'espace C mis sous la forme de Cayley les déplacements sont les transformations homographiques qui conservent l'absolu, la distance de deux points AB est égale à la distance des points homologues, les rapports se conservant.

Une transformation homographique générale dans l'espace à quatre dimensions dépend de vingt-quatre coefficients. En égalant la forme Φ avec la forme déduite par cette transformation, on aura quinze équations pour vingt-six coefficients homogènes, il reste donc dix paramètres libres pour déterminer une transformation homographique conservant l'absolu.

Toutes ces transformations forment le groupe des déplacements. Soit Γ une telle transformation, à chaque point A de l'absolu, elle fait correspondre un point a de l'absolu, les hyperplans tangents en ces points étant homologues.

Dans **E** l'homographie Γ se traduit par une transformation $[\Gamma]$ qui conserve les sphères et telle que à quatre sphères, passant par un point, correspondent quatre sphères passant par un autre point. La transformation $[\Gamma]$ est donc ponctuelle. En plus, tous les plans de **E** sont représentés en **C** par les points d'un hyperplan tangent à l'absolu au point représentant le plan de l'infini; donc par la transformation $[\Gamma]$ les plans de **E** se transforment dans les sphères passant par un point $[H]$.

Si on ajoute donc à la transformation $[\Gamma]$ une inversion de centre $[H]$, on a une transformation ponctuelle qui conserve les plans et les sphères, qui par conséquent conserve le plan de l'infini et son cercle imaginaire. Cette transformation est donc une homographie qui ne peut être qu'un déplacement enclidien suivi d'une symétrie et une homothétie.

En faisant de nouveau la dernière inversion on retrouve la transformation $[\Gamma]$ qui se réduit donc à un déplacement et une homothétie, or un déplacement et une inversion (*).

L'homographie Γ , en **C**, doit conserver cinq points. Si A est un de ces points, son hyperplan polaire z , par rapport à l'absolu, reste aussi fixe. Les points de cet hyperplan z subissent une transformation homographique qui conserve la quadrique d'intersection de l'absolu avec z . Chaque système de génératrices de cette quadrique possède une paire de droites fixes qui par leurs intersections déterminent les autres quatre points fixes de **C**. Les quatre points déterminent un tétraèdre dont quatre arêtes sont sur l'absolu et les deux autres sont polaires réciproques.

Si les points de z sont tous fixes, la transformation Γ a comme correspondante en **E** une inversion par rapport à la sphère $[A]$.

Les deux droites polaires de z représentent en **E** deux cercles en bi-involution, normaux à la sphère $[A]$ et qui restent fixes par la transformation $[\Gamma]$.

Si la sphère $[A]$ est réelle les deux cercles sont, un réel et l'autre imaginaire; si la sphère est imaginaire les deux cercles sont réels. Les points d'un de ces cercles se transforment par une homographie dont les points doubles sont les foyers de l'autre cercle.

Les sphères passant par un de ces cercles se transforment par une homographie dont les éléments doubles sont les sphères de rayon

(*) DARBOUX. — Principes de géométrie analytique, 1917, p. 374.

nul, donc deux sphères homologues font un même angle qui n'est pas forcément le même pour les deux faisceaux.

Appelons x et y les deux droites, en **C**, polaires par rapport à l'intersection de l'absolu avec z . Le plan Ax est polaire réciproque de la droite y et le plan Ay de la droite x .

Les points des droites x et y subissent deux translations de longueur ξ et η respectivement, c'est-à-dire que les points homologues ont avec leurs points d'intersection de ces droites avec l'absolu le même rapport anharmonique.

Si on donne les deux droites x et y avec les quantités ξ et η , le déplacement est déterminé. Le pôle A de l'hyperplan z , déterminé par les deux droites polaires x et y , est fixe.

Pour avoir l'homologue d'un point M quelconque on mène la droite AM qui coupe z au point I ; par I on mène la droite i qui coupe x et y aux points U et S respectivement. Les homologues de ces deux points sont V et T tels que les distances UV et ST sont égales à ξ et η respectivement. Prenons sur la droite VT le point H dont la distance à V est égal à la longueur IU ; le point N sur AH à la même distance de H que M de I est l'homologue du point M .

On aurait pu procéder de la manière suivante :

Menons par M la droite normale à x , qui coupe x au point U et le plan Ay au point R . Les points du plan Ay décrivent des cercles de centre A et tournent tous d'un angle constant égal à η , A et y étant dans ce plan pôle et polaire. Soit L le point où vient R ; le point M vient au point N sur la droite VL , sa distance à x étant la même. On aurait eu le même résultat en changeant dans le raisonnement précédent x avec y en même temps que ξ et η .

Les deux dernières constructions correspondent en **E** aux suivantes :

Soit $[M]$ une sphère quelconque; il existe deux sphères $[U]$ et $[R]$ se coupant suivant un cercle de la première, l'une passant par le cercle $[x]$, l'autre le coupant orthogonalement. La sphère homologue de $[U]$ sera une sphère $[V]$ passant aussi par $[x]$ et faisant avec la première un angle ξ .

Pour avoir l'homologue de la deuxième on considérera les divers cas suivant la réalité des figures. Si les deux cercles en bi-involution $[x]$, $[y]$ sont réels on mène par le centre de $[R]$ une droite passant par le centre radical des deux cercles; elle coupe l'axe de $[y]$ au centre d'une sphère $[S]$ dont l'homologue est la sphère $[T]$ telle que leur angle soit η . Le centre de la sphère $[L]$ homologue à $[R]$ est le point qui est situé sur la droite joignant le centre radical au centre

de la sphère [T] et tel que le rapport anharmonique formé par le point, le centre radical et les deux points d'intersection du cercle [x] avec cette droite soit le même que pour la première droite. La sphère [N], passant par le cercle [VL] et faisant avec V le même angle que [M] avec [U], est la sphère homologue de la sphère donnée.

Si on avait changé dans cette construction les cercles [x] et [y] en même temps que les quantités ξ, η on aurait trouvé le même résultat.

Cette construction donne pour le point N, en **C**, quatre solutions, mais en choisissant une pour un point, tous les autres points auront les homologues bien déterminés.

Nous avons supposé que parmi les points fixes de l'homographie Γ se trouve le point A qui n'est pas situé sur l'absolu. Si les cinq points sont sur l'absolu le pôle de l'hyperplan déterminé par quatre est aussi fixe, donc la transformation Γ est une identité, ayant plus de cinq points qui sont fixes.

Si tous les cinq points sont dans un hyperplan « t » tangent à l'absolu, son pôle T y est aussi contenu donc la transformation homographique Γ conserve l'absolu ainsi que tous les points d'un hyperplan tangent. Un point quelconque M de l'absolu est fixe car son hyperplan tangent, coupant t suivant un plan fixe, est lui-même fixe, ainsi que tous ses points. Une droite quelconque est fixe car elle coupe deux hyperplans et l'absolu en quatre points fixes. La substitution Γ est donc une identité.

On a supposé dans ce cas que les cinq points fixes sont situés d'une manière arbitraire sur le cône des génératrices de l'absolu de sommet T. Si les cinq points sont, dans un déplacement réel, deux imaginaires conjugués et trois confondus au point T, on a un cas spécial pour Γ . Si le point T est dans ce cas le point qui correspond au plan de l'infini, la transformation [Γ] est un déplacement habituel en **E**, suivi ou non d'une symétrie.

Soit H, I les deux points imaginaires conjugués situés sur le cône des génératrices de l'absolu. La transformation Γ conservant les points de l'hyperplan t , représentant les plans de l'espace **E**, [Γ] est une homographie conservant le plan de l'infini et le cercle imaginaire.

La droite $AB = a$ représente en **E** une droite quelconque [a], qui reste fixe. La droite $TU = b$, polaire de AB par rapport au cône, représente en **E** une droite [b] dans le plan de l'infini, et normale à la première. Les points de la droite a déterminent avec leurs homologues une homographie dont les points doubles sont sur le cône ; il

en résulte que les plans passant par la droite $[a]$ décrivent une homographie dont les plans doubles sont les plans isotropes passant par cette droite ils doivent donc tourner d'un angle constant autour de $[a]$.

Les points de la droite b décrivent une homographie parabolique dont les points doubles sont confondus au point T. Il en résulte que dans **E** les plans normaux à la droite $[a]$ subissent une translation, donc les droites normales à la droite $[a]$ ont un mouvement hélicoïdal. Elles sont représentées en **C** par les droites coupant a et b . Les points M d'une de ces droites restent à une même distance de la droite « a », donc les plans $[M]$ forment après le déplacement $[\Gamma]$ le même angle avec la droite $[a]$ qu'auparavant. Les plans de **E** décrivent donc un mouvement hélicoïdal suivi ou non d'une symétrie par rapport à l'axe $[a]$. La symétrie correspondait en **C** à un retournement par rapport aux droites a, b .

La transformation $[\Gamma]$ est un mouvement hélicoïdal suivi ou non d'une symétrie par rapport à l'axe de rotation.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

**Extrémales passant par deux points; plus courte distance
entre deux points d'une surface.**

Vu :

Nancy, le 20 Février 1925.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

P. PETIT.

Vu et permis d'imprimer :

Nancy, le 21 Février 1925.

Le Recteur de l'Académie de Nancy,

Ch. ADAM,

Membre de l'Institut.

